PAMO 2021 day 2 solutions

Solution 4: Without loss of generality, we might suppose that $m \geq n$.

• If $n = 0$, the only possible solutions are $m = 1$ or $m = -1$. By symmetry $(m, n) = (0, 1); (0, -1)$ are also solutions.

From now on, we assume m and n non zero.

• If $m = n$, then $\dfrac{m^2+m}{m^2-m} = \dfrac{m+1}{m-1} = 1 + \dfrac{2}{m-1} \in \mathbb{Z}$ so $m-1|2$ and $m \neq 0$, then $m-1 = -2, 1, 2$ and $m = -1, 2, 3$.

• If $m - n > 1$, $(m^2 - n) - (n^2 + m) = (m - n - 1)(m + n)$.

(1) Assume $m - n > 1$ and $m + n > 0$ then, $m^2 - n > n^2 + m \geq n + m > 0$, so that $0 < \dfrac{n^2+m}{m^2-n} < 1$, a contradiction.

(2) Assume $m - n > 1$ and $m + n < 0$ then, $0 < m - n < m^2 - n < n^2 + m$, so that $0 < \dfrac{m^2-n}{n^2+m} < 1$, a contradiction.

(3) Assume that $m - n > 1$ and $m = -n$, then $m \geq 1$ and $n = -m$. We get the solutions $(m, -m)$ for any $m \geq 1$.

• If $m - n = 1$, then $\dfrac{m^2+n}{n^2-m} = \dfrac{n^2+3n+1}{n^2-n-1} = 1 + \dfrac{2(2n+1)}{n^2-n-1} \in \mathbb{Z}$ so that $n^2 - n - 1|2(2n + 1)$ and since n^2-n-1 is odd, then $n^2-n-1|2n+1$. Hence, $n^2-n-1 \leq 2n+1$, meaning that $n^2-3n-2 \leq 0$. Therefore, $n \leq 3$,and $n > 0$ implying $n = 1, 2$ or 3 (the latter being rejected in verification).

Finally, the solutions are $(m, n) = (0, 1), (0, -1), (-1, -1), (2, 2)(3, 3)(1, 2)(2, 3)(m, -m)$, for any $m > 1$ and their permutations.

Solution 5: Let $x = y = 0$, then we obtain $(f(0)+0)(0+f(0)) = f(0)+f(0)+2f(0)$, and so $f(0)^2 = 4f(0)$. We see that either $f(0) = 0$ or $f(0) = 4$.

Suppose that $f(0) = 0$, let $y = 0$ in the functional equation to obtain $xf(x) = f(x^2)$ for all $x \in \mathbb{R}$. Now let $x = y$ in the functional equation to obtain that

$$f(x)^2 + 2xf(x) + x^2 = (f(x) + x)^2 = f(x^2) + f(x^2) + 2f(x^2) = 4xf(x).$$

We thus see that

$$(f(x) - x)^2 = f(x)^2 - 2xf(x) + x^2 = 0,$$

and so $f(x) = x$ for all $x \in \mathbb{R}$.

Suppose that $f(0) = 4$. Letting $y = 0$ in the functional equation gives us that

$$f(x)(x + 4) = f(x^2) + 12$$

and so $f(x^2) = xf(x) + 4f(x) - 12$ for all $x \in \mathbb{R}$. Now letting $x = y$ in the functional equation gives us that

$$f(x)^2 + 2xf(x) + x^2 = (f(x) + x)^2 = 4f(x^2) = 4xf(x) + 16f(x) - 48.$$

We obtain the equation

$$f(x)^2 - (2x + 16)f(x) + x^2 + 48 = 0.$$

This does not always have a solution for $f(x)$. For example, if $x=-8$, then we obtain $f(x)^2+112=0$, which is impossible. There are thus no solutions in the case where $f(0)=4$.
We see that the only solution to the functional equation is $f(x)=x$ for all $x\in\mathbb{R}$, and we can verify that this function does indeed satisfy the functional equation.

Solution 6: Consider S_1 and S_2 the centers of the circumscribed circles to triangles ASD and BSD respectively. Put $\alpha=\angle ASS_1$ and $2\delta=\angle AS_1S$. We have by elementary argument that

$$\alpha=\tfrac{\pi}{2}-\delta \text{ and } \angle ADS=\delta.$$

In similar way, put $\beta=\angle S_2SB$ and $\angle BS_2S=2\varepsilon$.
We deduce as above that

$$\beta=\tfrac{\pi}{2}-\varepsilon \text{ and } \angle SCB=\varepsilon.$$

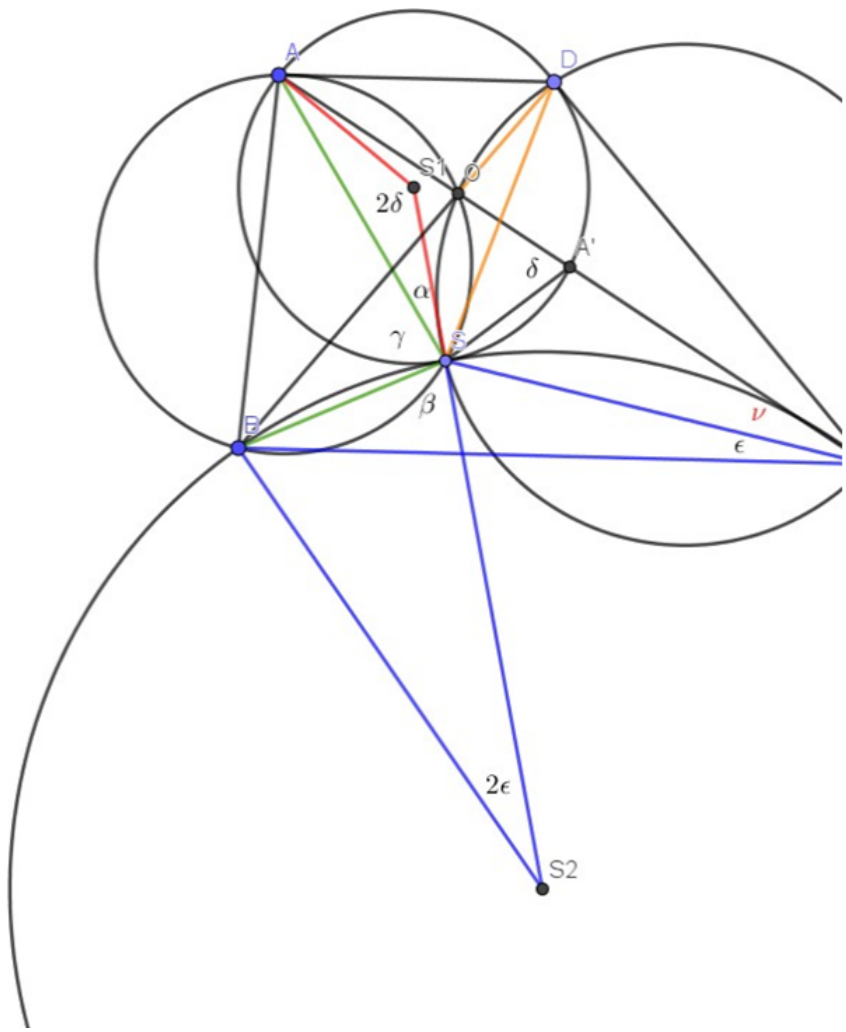
Finally, let $\gamma=\angle BSA$ and $\nu=\angle SCO=\angle SDO$.
Our goal is to prove that

$$\gamma+\alpha+\beta=\pi.$$

That fact is equivalent to the tangency of the two circles.
The last condition is also equivalent to

$$\gamma=\delta+\varepsilon.$$

By adding some auxiliary points and lines, a careful angle chasing and the fact that $AD\parallel BC$ leads to the solution. Indeed, if we denote by A' the intersection point of the circle circumscribed to the triangle ASD and the line AC, one has $\angle OA'S=\delta$, $\angle A'SC=\delta-\nu$ then $\angle DOC=\varepsilon+\delta$ which implies that $\gamma=\varepsilon+\delta$.
Without loss of generality, we do in similar way the configuration where the two circles are internally tangent.


A
D
S1
O
A'
2δ
δ
α
γ
S
β
B
ν
ϵ
2ϵ
S2

OPAM 2021 solutions jour 2

Solution 4 : Sans perte de généralité, on peut supposer que $m \geq n$.

• Si $n = 0$, les seules solutions possibles sont $m = 1$ ou $m = -1$. Par symétrie $(m, n) = (0, 1); (0, -1)$ sont aussi solutions.

Dorénavant, on suppose que m et n sont non nuls.

• Si $m = n$, alors $\dfrac{m^2 + m}{m^2 - m} = \dfrac{m+1}{m-1} = 1 + \dfrac{2}{m-1} \in \mathbb{Z}$ donc $m - 1 | 2$ et $m \neq 0$, alors $m - 1 = -2, 1, 2$ et $m = -1, 2, 3$.

• Si $m - n > 1$, $(m^2 - n) - (n^2 + m) = (m - n - 1)(m + n)$.

(1) Supposons que $m - n > 1$ et $m + n > 0$ alors, $m^2 - n > n^2 + m \geq n + m > 0$, de sorte que $0 < \dfrac{n^2 + m}{m^2 - n} < 1$, contradiction.

(2) Supposons que $m - n > 1$ et $m + n < 0$ alors, $0 < m - n < m^2 - n < n^2 + m$, de sorte que $0 < \dfrac{m^2 - n}{n^2 + m} < 1$, encore une contradiction.

(3) Supposons que $m - n > 1$ et $m = -n$, alors $m \geq 1$ et $n = -m$. On obtient les solutions $(m, -m)$ pour tout $m \geq 1$.

• Si $m - n = 1$, alors $\dfrac{m^2 + n}{n^2 - m} = \dfrac{n^2 + 3n + 1}{n^2 - n - 1} = 1 + \dfrac{2(2n+1)}{n^2 - n - 1} \in \mathbb{Z}$ de sorte que $n^2 - n - 1 | 2(2n + 1)$ et comme $n^2 - n - 1$ est impair, alors $n^2 - n - 1 | 2n + 1$. Ainsi, $n^2 - n - 1 \leq 2n + 1$, ce qui signifie que $n^2 - 3n - 2 \leq 0$. Par conséquent, $n \leq 3$, et $n > 0$ impliquant $n = 1, 2$ ou 3 (le dernier est à rejeter dans la vérification).

Finalement, les solutions sont $(m, n) = (0, 1), (0, -1), (-1, -1), (2, 2)(3, 3)(1, 2)(2, 3)(m, -m)$, pour tout $m > 1$ et leurs permutations.

Solution 5 : On met $x = y = 0$ et on obtient $(f(0) + 0)(0 + f(0)) = f(0) + f(0) + 2f(0)$, de sorte que $f(0)^2 = 4f(0)$. D'où $f(0) = 0$ ou $f(0) = 4$.

Supposons que $f(0) = 0$, posons $y = 0$ dans l'équation fonctionnelle pour obtenir $xf(x) = f(x^2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Maintenant, on pose $x = y$ dans l'équation fonctionnelle pour obtenir

$$f(x)^2 + 2xf(x) + x^2 = (f(x) + x)^2 = f(x^2) + f(x^2) + 2f(x^2) = 4xf(x).$$

On voit alors que

$$(f(x) - x)^2 = f(x)^2 - 2xf(x) + x^2 = 0,$$

et donc $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Supposons maintenant que $f(0) = 4$. En posant $y = 0$ dans l'équation fonctionnelle, on trouve

$$f(x)(x + 4) = f(x^2) + 12$$

et donc $f(x^2) = xf(x) + 4f(x) - 12$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Puis, en posant $x = y$ dans l'équation fonctionnelle, on trouve

$$f(x)^2 + 2xf(x) + x^2 = (f(x) + x)^2 = 4f(x^2) = 4xf(x) + 16f(x) - 48.$$

Ceci ramène à l'équation

$$f(x)^2 - (2x+16)f(x) + x^2 + 48 = 0.$$

Cette équation n'admet pas toujours des solutions en $f(x)$. Par exemple, si $x = -8$, alors on obtient $f(x)^2 + 112 = 0$, ce qui est impossible. Ainsi, il n'y a pas de solutions dans le cas $f(0) = 4$.
On voit que l'unique solution de l'équation fonctionnelle est $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et on peut vérifier que cette fonction vérifie en fait l'équation fonctionnelle.

Solution 6 : Soient S_1 et S_2 les centres des cercles circonscrits aux triangles ASD et BSD respectivement. On pose $\alpha = \widehat{ASS_1}$ et $2\delta = \widehat{AS_1S}$. De façon élémentaire, on a

$$\alpha = \tfrac{\pi}{2} - \delta \text{ et } \widehat{ADS} = \delta.$$

De façon similaire, on pose $\beta = \widehat{S_2SB}$ et $\widehat{BS_2S} = 2\varepsilon$.
On en déduit comme ci-haut que

$$\beta = \tfrac{\pi}{2} - \varepsilon \text{ et } \widehat{SCB} = \varepsilon.$$

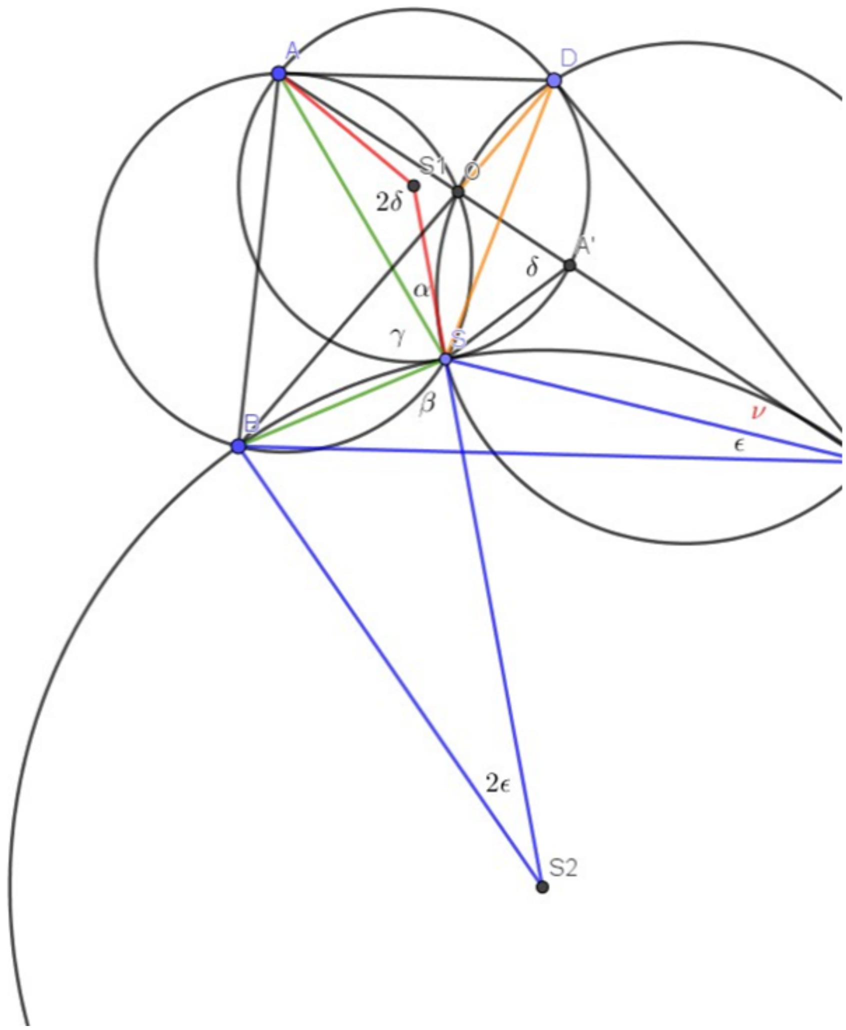
Finalement, soit $\gamma = \widehat{BSA}$ et $\nu = \widehat{SCO} = \widehat{SDO}$.
Notre but est de montrer que

$$\gamma + \alpha + \beta = \pi.$$

Cette égalité est équivalente à la tangence des deux cercles.
La dernière condition est aussi équivalente à

$$\gamma = \delta + \varepsilon.$$

L'ajout de quelques points et droites auxiliaires, une chasse aux angles prudente et le fait que $(AD)//(BC)$ mène à la solution. En effet, si on désigne par A' le point d'intersection du cercle circonscrit au triangle ASD et la droite (AC), on a $\widehat{OA'S} = \delta$, $\widehat{A'SC} = \delta - \nu$ donc $\widehat{DOC} = \varepsilon + \delta$ impliquant que $\gamma = \varepsilon + \delta$.
Sans perte de généralité, on traite de manière similaire la configuration où les deux cercles sont intérieurement tangents.


A
D
S1
O
2δ
A'
δ
α
γ
S
β
B
ν
ϵ
2ϵ
S2