Problème 1 :

Soit n un entier supérieur à 3. Un carré de longueur de côté n est divisé par des droites parallèles à chaque côté en n^2 carrés de longueur de côté 1.

Trouver le nombre de trapèzes convexes qui ont des sommets parmi les sommets des n^2 carrés de longueur de côté 1, avec les côtés inférieurs ou égaux à 3, et dont l'aire est égale à 2.

Note : les parallélogrammes sont des trapèzes.

Problème 2 :

Soit (C) un cercle, P un point extérieur à celui-ci, A et B les points de contact des deux tangentes à (C) passant par P. Soit K un point quelconque sur (AB), distinct de A et de B. On pose T le second point d'intersection de (C) et du cercle circonscrit au triangle PBK. En outre, on appelle P' le symétrique de P par rapport à A.

Montrer que $\widehat{PBT}=\widehat{P'KA}$.

Problème 3 :

Soient $a_0, a_1, \ldots$ et $p_0, p_1, \ldots$ des suites infinies d'entiers naturels non nuls vérifiant :

- $a_0 \geq 2$,
- p_n est le plus petit diviseur premier de a_n pour chaque entier $n \geq 0$, et
- $a_{n+1} = a_n + \frac{a_n}{p_n}$ pour chaque entier $n \geq 0$.

Monter qu'il existe un entier N vérifiant $a_{n+3} = 3a_n$ pour tout $n > N$.

Durée : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Problem 1:
Let n be an integer greater than 3. A square of side length n is divided by lines parallel to each side into n^2 squares of length 1. Find the number of convex trapezoids which have vertices among the vertices of the n^2 squares of side length 1, have side lengths less than or equal to 3, and have area equal to 2.
Note : parallelograms are trapezoids.

Problem 2:
Let C be a circle, P be a point outside it, and A and B be the intersection points between C and the tangents from P onto C. Let K be a point on the line AB, distinct from A and B and let T be the second intersection point of C and the circle passing through P, B and K. Also, let P' be the reflection of P in point A.
Show that $\angle PBT = \angle P'KA$.

Problem 3:
Let $a_0, a_1, \ldots$ and $p_0, p_1, \ldots$ be infinite sequences of positive integers such that:

- $a_0 \geq 2$,
- p_n is the smallest prime divisor of a_n for each integer $n \geq 0$, and
- $a_{n+1} = a_n + \frac{a_n}{p_n}$ for each integer $n \geq 0$.

Prove that there is an integer N such that $a_{n+3} = 3a_n$ for $n > N$.

Time : 4 hours and 30 minutes
Each problem worth 7 points